# Teoría de Juegos

## Repetición y azar

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

2023-1

# Repetición y azar

- Juegos repetidos
  - Finitas veces
  - Infinitas veces
- Juegos con jugadas del azar
  - Preliminares
  - Resultados monetarios
  - Actitud frente al riesgo
- Aplicación
  - Salarios de eficiencia

- Consideremos el dilema del prisionero:

| | Cnf | CII |
|---|---|---|
| Cnf | 6,6 | 12,3 |
| CII | 3,12 | 11,11 |

repetido dos veces y veamos el equilibrio perfecto en subjuegos.

⊙ En la segunda, y última,vez que se juega cada jugador debe elegir *Cnf* , lo que da un pago de $(6, 6)$ sin importar qué se jugo en la primera vez.

- Si incorporamos esto, tenemos el juego reducido:

| | Cnf | CII |
|---|---|---|
| Cnf | 6,6 | 12,3 |
| CII | 3,12 | 11,11 |

Pagos de la primera ronda

$+$

| | |
|---|---|
| 6,6 | 6,6 |
| 6,6 | 6,6 |

Pagos en la segunda ronda

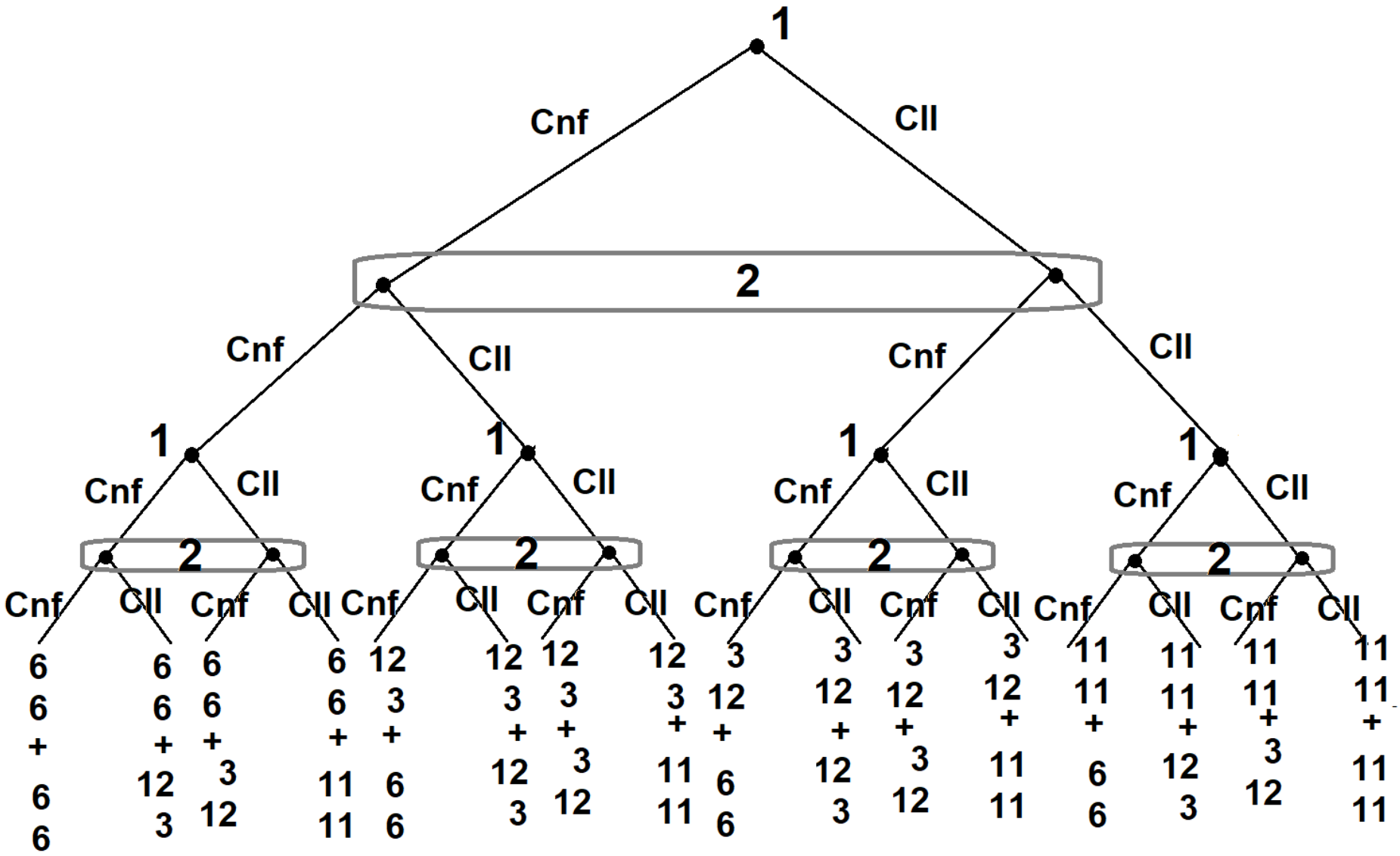
$=$

| | Cnf | CII |
|---|---|---|
| Cnf | 12,12 | 18,9 |
| CII | 9,18 | 17,17 |

Pagos del juego reducido

≀ con un único EN : $(Cnf, Cnf)$.

⊙ Luego el único ENPSJ es que en las dos rondas se juegue el EN del juego base.


1
Cnf
CII
2
Cnf
CII
Cnf
CII
1
1
1
1
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
2
2
2
2
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
Cnf
CII
6
6
+
6
6
6
6
+
12
3
6
6
+
3
12
6
6
+
11
11
12
3
+
6
6
12
3
+
12
3
3
+
3
12
12
3
+
11
11
3
12
+
6
6
3
12
+
12
3
3
12
+
3
12
3
12
+
11
11
11
11
+
6
6
11
11
+
12
3
11
11
+
3
12
11
11
+
11
11

# Juegos repetidos

Consideremos un **juego con un único equilibrio de Nash** repetido un número finito de veces.

- En cada "etapa" ambos jugadores saben lo que ha ocurrido hasta ese momento.
- ¿Cuál es la solución del juego usando inducción inversa?
- ¿Cuál es el equilibrio en la última etapa? ¿Y en la penúltima? ...

Si un **juego con un único equilibrio de Nash** se repite un número finito de veces:

1. En todo ENPSJ, sin importar lo jugado antes, ambos jugadores planean siempre jugar su estrategia en el EN del juego base.
2. En todo EN en cada etapa se debe observar el EN del juego base.

- Si el juego tiene más de un EN o el horizonte de repeticiones es infinito se pueden tener resultados diferentes.

- Consideremos ahora el juego:

| | I | C | D |
|---|---|---|---|
| A | 1,1 | 5,0 | 0,0 |
| M | 0,5 | 4,4 | 0,0 |
| B | 0,0 | 0,0 | 3,3 |

que tiene dos EN : $(B, D)$ y $(A, I)$ con pagos diferentes, repetido dos veces y veamos el equilibrio perfecto en subjuegos.

⊙ La segunda, y última, se puede jugar $(B, D)$ con un pago de $(3, 3)$ o $(A, I)$ con un pago de $(1, 1)$.

⊙ La clave es que esto puede estar condicionado a lo jugado en la primera ronda.

• Asumamos que se jugará $(B, D)$ en la segunda ronda si se jugó $(M, C)$ en la primera, caso contrario se jugará $(A, I)$.

⊙ Considerando esto tenemos el juego reducido:

| | I | C | D |
|---|---|---|---|
| A | 1,1 | 5,0 | 0,0 |
| M | 0,5 | 4,4 | 0,0 |
| B | 0,0 | 0,0 | 3,3 |

Pagos de la primera ronda

$+$

| | | |
|---|---|---|
| 1,1 | 1,1 | 1,1 |
| 1,1 | 3,3, | 1,1 |
| 1,1 | 1,1 | 1,1 |

Pagos en la segunda ronda

$=$

| | I | C | D |
|---|---|---|---|
| A | 2,2 | 6,1 | 1,1 |
| M | 0,6 | 7,7 | 1,1 |
| B | 1,1 | 1,1 | 4,4 |

Pagos del juego reducido

≀ con 3 EN : $(A, I)$, $(M, C)$ y $(B, D)$.

⊙ Tenemos varios ENPSJ, pero el interesante es en el que se juega $(M, C)$, un perfil que no es EN del juego base, en la primera ronda.

- Consideremos el dilema del prisionero:

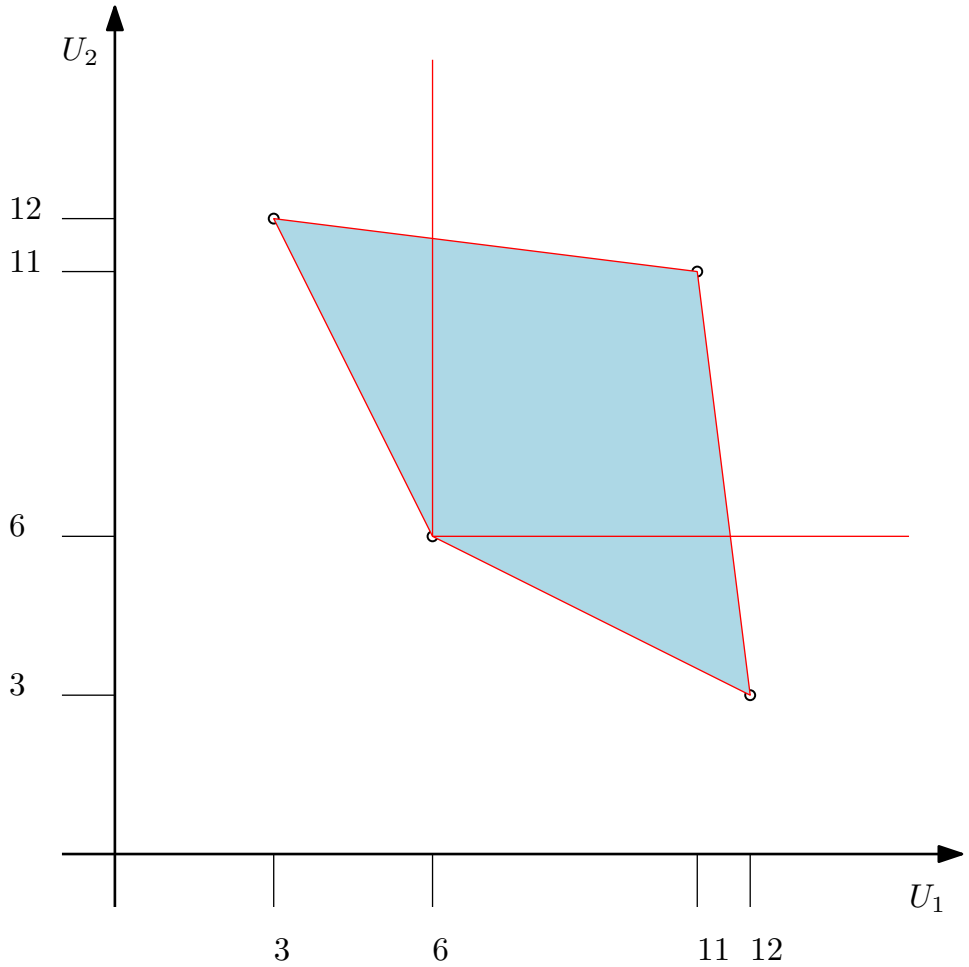
| | Cnf | CII |
|---|---|---|
| Cnf | 6,6 | 12,3 |
| CII | 3,12 | 11,11 |

- Repetido $\infty$ veces.
- En cada repetición se produce un resultado del juego base.
- El resultado del juego repetido es una secuencia de $\infty$ resultados del juego base.
- Asumimos que podemos representar las preferencias sobre los resultados por medio de la utilidad promedio descontada:

$$U(\mathfrak{O}) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u(o_t)$$

con $0 < \delta < 1$

- Los pagos posibles del dilema del prisionero repetido infinitas veces corresponden al polígono con vértices en los pagos del juego base:



Consideremos el dilema del prisionero.

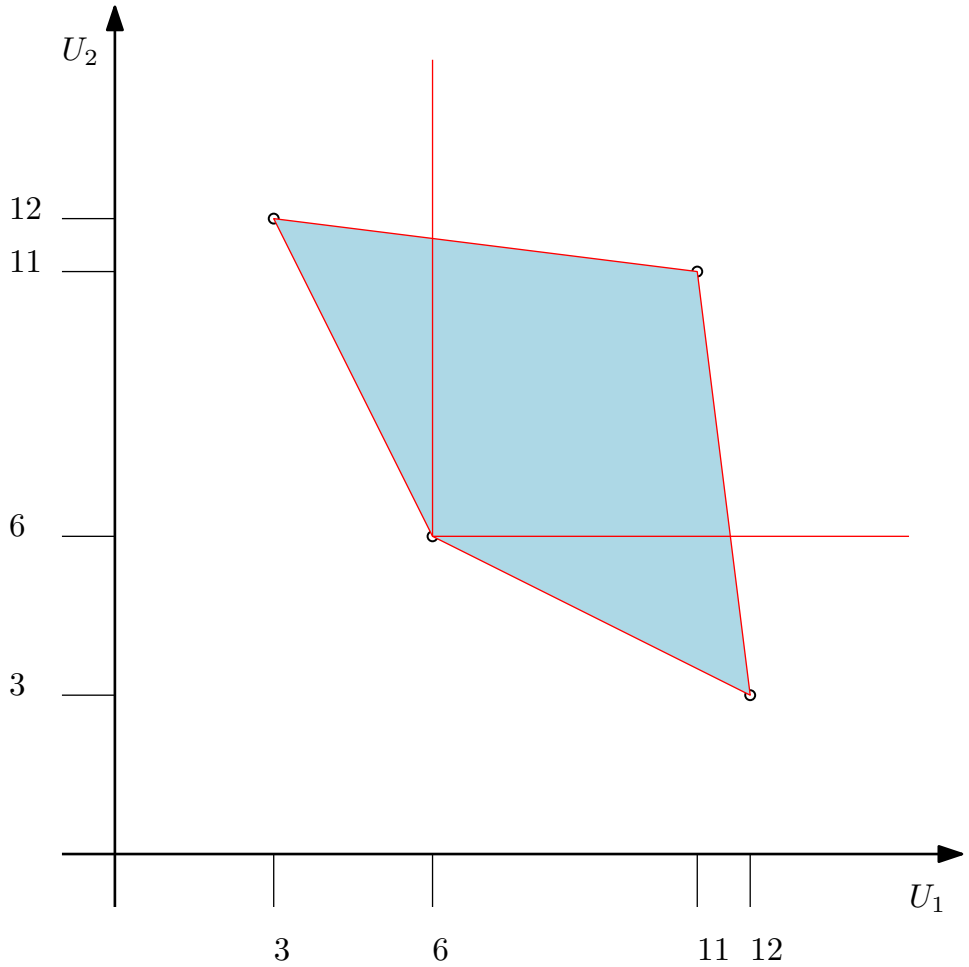
| | Cnf | CII |
|---|---|---|
| Cnf | 6,6 | 12,3 |
| CII | 3,12 | 11,11 |

repetido infinitas veces.

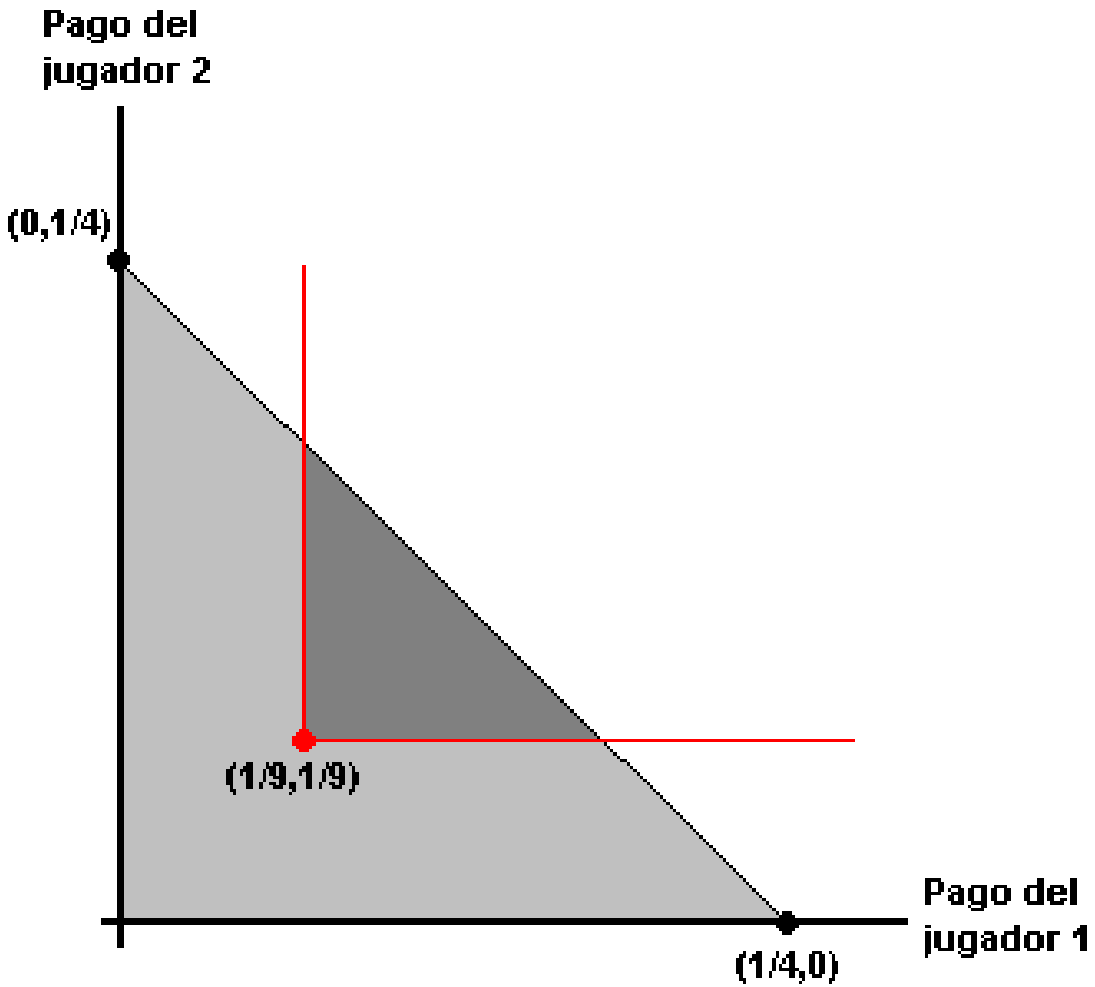
- Consideremos las siguientes estrategias para ambos jugadores:
  - "Jugar *CII* la primera vez y todas las siguientes si el resultado ha sido $(CII, CII)$ en todo el pasado. En caso contrario jugar *Cnf* para siempre".
- Si un jugador se desvía de esta estrategia, en esa etapa gana 1 punto adicional de pago, pero pierde 5 puntos en todos las etapas siguientes. ¿le conviene?

- Veamos los pagos del perfil simétrico con cada jugador jugando:
  - "Jugar *CII* la primera vez y todas las siguientes si el resultado ha sido (*CII*, *CII*) en todo el pasado. En caso contrario jugar *Cnf* para siempre".
- Si ningún jugador se desvía de la estrategia, cada uno recibe:
  - $(1-\delta)(11+11\delta+11\delta^2+11\delta^3+11\delta^4+...)=11$
- Si alguno se desvía su pago sería:
  - $(1-\delta)(12+6\delta+6\delta^2+6\delta^3+6\delta^4+...)=12(1-\delta)+6\delta=12-6\delta$
- El desvío "no conviene" si:
  - $11>12-6\delta$
- Esto se cumple si:
  - $\delta>1/6$

- En general se pueden conseguir pagos descontados promedios en la región en el primer cuadrante relativo al pago del EN del juego base:



- Por ejemplo en el duopolio de cournot:



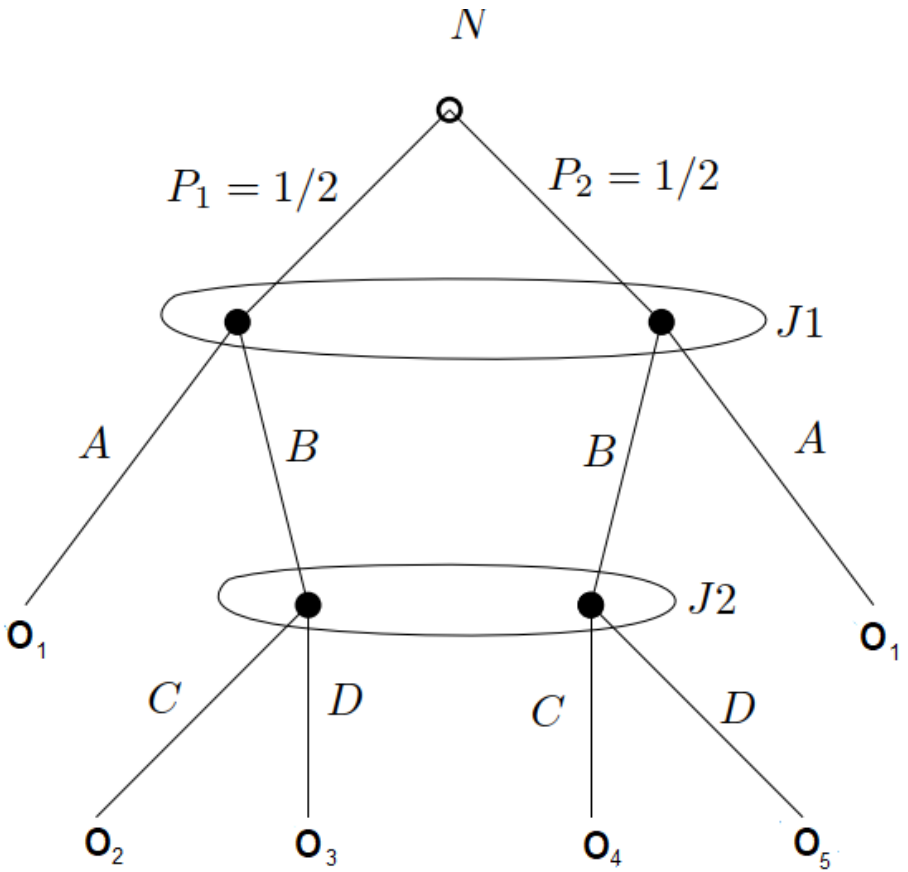
- En muchos juegos interviene el azar, en algunos de manera importante.

⊙ Más adelante veremos el caso cuando ese azar proviene de las decisiones estratégicas de otros jugadores, en esta sección veremos cuando el caso cuando el azar es "natural"

⊙ El azar se introduce en un juego por medio de la **N**aturaleza, un jugador no estratégico, sin preferencias y que elige al azar

⊙ Aunque el azar (**N**) puede jugar en cualquier momento de un juego, en la mayoría de casos elige al inicio del juego y de manera oculta

# Ejemplo




| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $A$ | $o_1$ | $o_1$ |
| $B$ | $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ o_2 & o_4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ o_3 & o_5 \end{pmatrix}$ |

- Cuando los resultados son monetarios, no es correcto (en general) poner como pago del juego el resultado monetario.

⊙ Esto corresponde a usar una $u$ lineal, de hecho la identidad, y esta utilidad sobre los resultados puede no capturar la actitud frente al riesgo.

⊙ Cuando el conjunto de resultados, como en este caso, es un subconjunto de $\mathbb{R}$, podemos hablar de manera muy precisa de la actitud frente al riesgo.

- Consideremos ahora loterías sobre el espacio de pagos monetarios.
  - Así $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$.
  - Por comodidad (técnica) pensaremos en $u$ definida sobre todo $\mathbb{R}$
  - Aún más asumiremos que $u$ tiene hasta segunda derivada continua.
  - Con esta $u$ la utilidad de una lotería: $L = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ es:

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

# Aversión al riesgo

- Ser **adverso al riesgo** significa preferir siempre el resultado promedio (medio, esperado) de una lotería a dicha lotería:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

- La aversión al riesgo es capturada por funciones $u$ cóncavas.

- Ser **neutro al riesgo** significa ser siempre indiferente entre resultado promedio (medio, esperado) de una lotería y dicha lotería:

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)$$

- La neutralidad al riesgo se representa por funciones lineales

# Medidas

• **Coeficiente absoluto de Arrow-Pratt**: dada la función $u$ el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt es:

$$r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

⊙ **Coeficiente relativo de Arrow-Pratt**: dada la función $u$ el coeficiente de aversión relativa al riesgo de Arrow-Pratt es:

$$r_R(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

# Utilidades de aversión constante

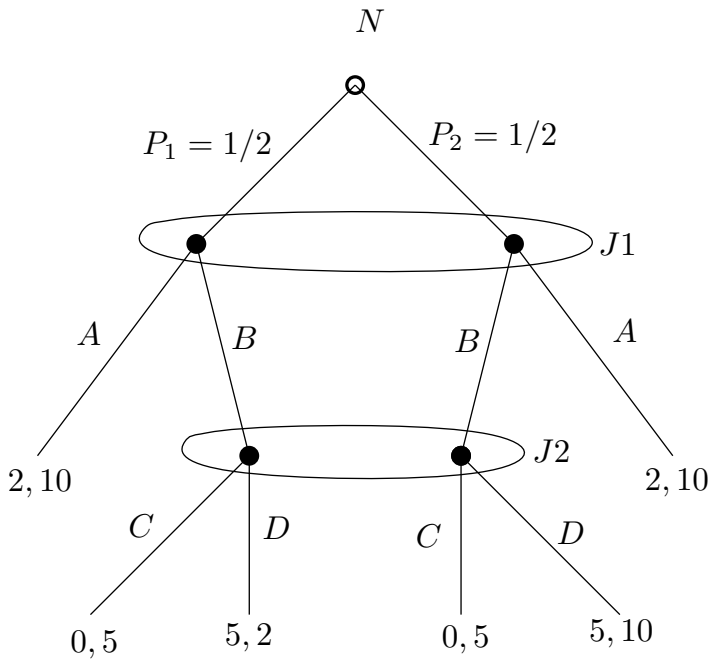
- CARA:

$$u(x) = -e^{-a\ x}$$

- CRRA:

$$u(x) = \begin{cases} x^{1-r} & r < 1 \\ Ln(x) & r = 1 \\ -x^{1-r} & r > 1 \end{cases}$$

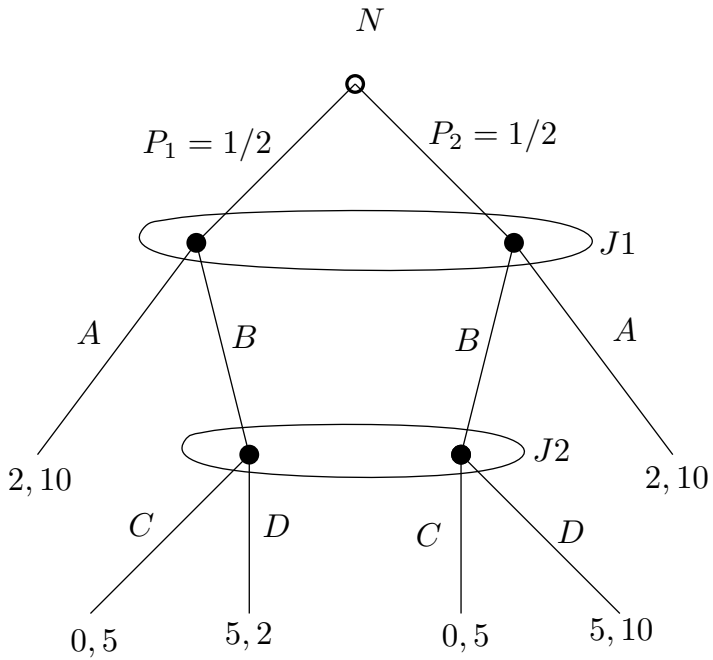
# Ejemplo




- Asumiendo jugadores neutros al riesgo:

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $A$ | $2, 10$ | $2, 10$ |
| $B$ | $0, 5$ | $5, 6$ |

# Ejemplo




- Asumiendo jugadores adversos al riesgo, $u_1$ y $u_2$ cóncavas:

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $A$ | $u_1(2), u_2(10)$ | $u_1(2), u_2(10)$ |
| $B$ | $u_1(0), u_2(5)$ | $u_1(5), \frac{u_2(2)+u_2(10)}{2}$ |

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $A$ | $u_1(2), u_2(10)$ | $u_1(2), u_2(10)$ |
| $B$ | $u_1(0), u_2(5)$ | $u_1(5), \frac{u_2(2)+u_2(10)}{2}$ |

- $MR_1(C) = A$ y $MR_1(D) = B$
- $MR_2(A) = \{C, D\}$ y $MR_2(B) = \begin{cases} C & \text{si} \quad u_2(5) \geq \frac{u_2(2)+u_2(10)}{2} \\ D & \text{si} \quad u_2(5) \leq \frac{u_2(2)+u_2(10)}{2} \end{cases}$

⊙ $(A, C)$ es un EN.

⊙ $(B, D)$ es un EN si $u_2(5) \leq \frac{u_2(2)+u_2(10)}{2}$

# Salarios de eficiencia

- Consideremos el siguiente juego base:
  - La empresa ofrece un salario $w$
  - El trabajador acepta o rechaza la oferta
  - Si la rechaza el juego acaba
  - Si la acepta, el trabajador escoge entre esforzarse (a un costo $e$) o no (costo 0)
  - Este esfuerzo es solo observado por el trabajador, no por la empresa.
  - Si el trabajador se esfuerza produce $V$ para la empresa.
  - Si no se esfuerza el producto puede ser 0 o $V$ con probabilidad 0.5 cada resultado.

- Este juego puede terminar de 4 maneras:
  - El trabajador rechaza la oferta: en este caso la empresa obtiene 0 como pago y el trabajador $w_0 > 0$ (utilidad/salario de reserva)
  - El trabajador acepta la oferta y se esfuerza: esto genera un pago $V - w$ para la empresa y $w - e$ para el trabajador.
  - El trabajador acepta la oferta, no se esfuerza y el producto es $V$: esto genera un pago $V - w$ para la empresa y $w$ para el trabajador.
  - El trabajador acepta la oferta, no se esfuerza y el producto es 0: esto genera un pago $-w$ para la empresa y $w$ para el trabajador.

- Luego los pagos (esperados) de acuerdo a las decisiones personales son:
  - Trabajador rechaza $w$: $U_E = 0$ y $U_T = w_0$
  - Trabajador acepta $w$ y se esfuerza: $U_E = V - w$ y $U_T = w - e$
  - Trabajador acepta $w$ y no se esfuerza: $U_E = (1/2)(V - w) + (1/2)(0 - w) = V/2 - w$ y $U_T = w$
- Asumimos que $V - e > w_0 > V/2$

# Salarios de eficiencia

- Por inducción inversa:
  - Si el trabajador acepta el empleo no se va a esforzar, y los pagos serían $(V/2 - w, w)$
  - El trabajador aceptará salarios $w \geqslant w_0$ y rechazará $w < w_0$.
  - Si la empresa ofrece $w \geqslant w_0$ obtiene $V/2 - w < V/2 - w_0 < 0$, si ofrece $w < w_0$ obtiene 0
  - A la empresa no le conviene contratar al trabajador y por lo tanto le ofrece $w < w_0$ (digamos $w = 0$ o simplemente no hace ninguna oferta)

⊙ En este juego los ENPSJ son perfiles con la empresa ofertando un salario por debajo de $w_0$ y el trabajador con el plan de aceptar cualquier salario mayor o igual a $w_0$ y luego no esforzarse.

- Lo que observaríamos es que la empresa no contrata al trabajador.

# Salarios de eficiencia repetido infinitas veces

- Si este juego se repite infinitas veces, el resultado observado puede ser muy diferente.

⊙ Luego de la primera vez que se realiza, la empresa observará el resultado: $V$ o 0. Si es 0 con seguridad sabrá que el trabajador no se ha esforzado y puede actuar en consecuencia las siguientes veces que se juegue.

⊙ Consideremos las siguientes estrategias

- Empresa: Ofrecer $w^* > w_0$ si nunca ha sido rechazada y nunca la producción fue 0, en caso contrario ofrecer 0.
- Trabajador: Aceptar cualquier $w \geq w_0$ y esforzarse si siempre le ofrecieron $w^*$ y nunca la producción fue 0, caso contrario no esforzarse. Rechazar cualquier $w < w_0$.

⊙ ¿Existe $w^*$ tala que el perfil descrito sea un ENPSJ?

# Salarios de eficiencia repetido infinitas veces

- Con estas estrategias el pago del trabajador (Como pago promedio descontado) es:

$$E = w^* - e$$

- Si el trabajador se desvía tendrá:

$$\begin{aligned} D &= (1-\delta)\left(w^* + \delta\left(1/2\frac{1}{1-\delta}(w^* - e) + 1/2\frac{1}{1-\delta}(w_0)\right)\right) \\ &= (1-\delta)w^* + \delta\left(1/2(w^* - e) + 1/2(w_0)\right) \end{aligned}$$

- Al trabajador no le conviene desviarse si

$$E > D$$

- Esto equivale a:

$$w^* > w_0 + e + 2\frac{1-\delta}{\delta}e$$

- Para la empresa la condición de equilibrio es:

$$w^* < V$$

- Entonces $w^*$ debe cumplir:

$$V > w^* > w_0 + e + 2\frac{1-\delta}{\delta}e$$

⊙ Luego si no se cumple:

$$V - e > w_0 + 2\frac{1-\delta}{\delta}e \tag{1}$$

No podría existir dicho $w^*$

⊙ Lo que hemos probado es que bajo (1) existe (más de uno, varios) $w^*$ tal que el perfil descrito es un EN.

- También es PSJ, pero no lo hemos justificado.